Satz von Bayes

Satz von Bayes

Sind E und F Ereignisse des gleichen Ergebnisraumes Ω mit $\mathrm{P(F)} \neq 0$, dann gilt

$$P(E \mid F) = \frac{P(F \mid E) \cdot P(E)}{P(F)}.$$

- **In Worten:** Die Wahrscheinlichkeit von E unter der Bedingung, dass F eingetreten ist, lässt sich durch die Wahrscheinlichkeit von F unter der Bedingung, dass E eingetreten ist, berechnen.
- Der Satz von Bayes erlaubt in gewissem Sinn das **Umkehren** von Schlussfolgerungen: Man geht von einem bekannten Wert $P(F \mid E)$ aus, ist aber eigentlich an dem Wert $P(E \mid F)$ interessiert.

Satz von Bayes (Forts.)

Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit

Sind E und F Ereignisse des gleichen Ergebnisraumes Ω, dann gilt

$$P(E) = P(E \mid F) \cdot P(F) + P(E \mid F^c) \cdot P(F^c),$$

wobei F^c das Gegenereignis von F bzeichnet.

In Worten: Das Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit stellt einen Zusammenhang zwischen den bedingten Wahrscheinlichkeiten und den Wahrscheinlichkeiten der Randverteilungen her.

Satz von Bayes (Forts.)

Beispiel. Ein Aids-Test hat eine Sensitivität von 99% (schlägt als positiv an, wenn Person krank) und eine Spezifität von 98% (schlägt in 98% der Fälle als negativ an, wenn Person nicht krank ist und in 2% der Fälle als positiv). In der Bevölkerung haben 0.1% der Personen Aids.

Frage. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person Aids hat, wenn der Test positiv angeschlagen hat?

⇨ Ereignisse: A: Person hat Aids
B: Test ist positiv

⇨ Bekannt ist: $P(A) = 0.001, \quad P(A^c) = 0.999,$
$P(B \mid A) = 0.99, \quad P(B \mid A^c) = 0.02$

⇨ Gesucht: $P(A \mid B)$

Sensitivität

1 - Spezifität

Satz von Bayes (Forts.)

Beispiel (Forts.).

⇨ Totale Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = P(B \mid A) \cdot P(A) + P(B \mid A^c) \cdot P(A^c) = 0.02097$$

⇨ Satz von Bayes

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{0.99 \cdot 0.001}{0.02097} = \boxed{4.72\%}$$

⇨ Erklärung

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B \mid A) \cdot P(A) + \boldsymbol{P(B \mid A^c)} \cdot \boldsymbol{P(A^c)}}$$

wäre die Spezifität = 1 ⇨ **oranger Term** = 0 (und somit $P(A \mid B) = 1$))

der **blaue Term** ist sehr stark (Krankheit ist sehr selten)

Angenommen Aids wäre zehnmal häufiger – wie wäre das Resultat dann?